数　　　学 (120 分)

【海洋工学部】

（令和2年度前期日程）

注　意　事　項

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．この冊子は全部で7ページから成っています。表紙を開くと白紙があります。さらに，その白紙を開いた左のページから1ページ目の問題がはじまります。印刷が不鮮明な場合，又はページの脱落に気付いたときは，申し出てください。

3．解答用紙は4枚です。

4．解答は必ず解答用紙の指定された欄に記入してください。(裏面は使用しないこと。)

5．解答用紙には必ず受験番号，氏名を記入してください。記入を忘れたとき，あるいは誤った番号を記入したときは失格となることがあります。

6．解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。

7．数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B を選択する者は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4-\mathrm{I}}$ を，
数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B を選択する者は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4-\mathrm{II}}$ を解答してください。

8．$\boxed{4}$ については解答用紙の指示に従い，解答するほうを○で囲んでください。

9．解答は100点満点で採点され，海事システム工学科と海洋電子機械工学科は採点結果の3倍が，流通情報工学科は採点結果の2倍が得点になります。

10．試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

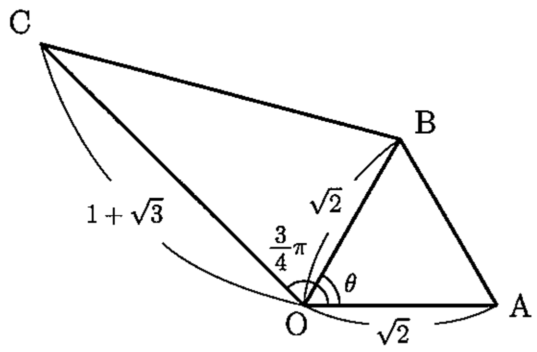
1 （配点 25 点）

図のような四角形 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{3}{4}\pi$ とする．また，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{3}{4}\pi\right)$ とおく．ただし，B，C は直線 OA に関して同じ側にあるとする．

(1) 四角形 OABC の面積 S を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

(2) S の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(3) (2) のとき，$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積を求めよ．



2 （配点 25 点）

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ に対して，関数

$$P_n(x) = a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．$P_n(x)$ の導関数 $P_n'(x)$ に対して，

$$P_{n+1}(x) = (x+1)P_n'(x) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

がすべての実数 x に対して成り立つとする．$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_2, b_2, c_2, d_2 を求めよ．

(2) 数列 $\{e_n\}$, $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $\{h_n\}$ を，すべての実数 x に対して，

$$P_n(x) = e_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + g_n(x+1) + h_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つように定める．このとき，$\{e_n\}$, $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $\{h_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$(x+1)^k$ の導関数は $k(x+1)^{k-1}$ となることを用いてよい．

(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

3 （配点 25 点）

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = x$, $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{4}$ とする．また，OA の中点を P，BC の中点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が最小となる x と，そのときの $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を求めよ.

(3) (2) のとき，$\cos\angle\mathrm{APQ}$ を求めよ.

(4) (2) のとき，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を求めよ.

$\boxed{4\text{-I}}$ （配点 25 点）

座標平面上の曲線 $C : y = x^3 - 3x$ と点 $\mathrm{P}(p, q)$ を考える．ただし，$p > 0$ とする．

(1) C 上の点 $(t, t^3 - 3t)$ における C の接線の方程式を t を用いて表せ．

(2) 点 P を通る C の接線がちょうど 2 本あるための p, q の満たす条件を求めよ．

(3) p, q が (2) の条件に加えて $q < -2$ を満たすとき，点 P を通る C の 2 つの接線と C とで囲まれた図形の面積を p を用いて表せ．

$\boxed{4\text{-II}}$ （配点 25 点）

$x > 0$ で定義される関数 $f(x) = (x-1)\log x$ に対して，座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える．

(1) $x > 0$ で，$f'(x) = 0$ を満たす x は，$x = 1$ のみであることを示せ．

(2) $f(x)$ の増減，極値，C の凹凸を調べ，C の概形を描け．

(3) C 上の点 $(e, e-1)$ における C の接線を ℓ とする．C, ℓ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．