数　　　　　学 (120分)

(令和5年度　前期日程)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. この冊子は全部で7ページから成っています。表紙を開くと白紙があります。さらに，その白紙を開いた左のページから1ページ目の問題がはじまります。印刷が不鮮明な場合，又はページの脱落に気付いたときは，申し出てください。
3. 解答用紙は4枚です。
4. 解答は必ず解答用紙の指定された欄に記入してください。(<u>裏面は使用しないこと。</u>)
5. 解答用紙には必ず受験番号，氏名を記入してください。記入を忘れたとき，あるいは誤った番号を記入したときは失格となることがあります。
6. 解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。
7. 数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数Bを選択する者は $\boxed{1}$ ，$\boxed{2}$ ，$\boxed{3}$ ，$\boxed{4-\mathrm{I}}$ を，数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数Bを選択する者は $\boxed{1}$ ，$\boxed{2}$ ，$\boxed{3}$ ，$\boxed{4-\mathrm{II}}$ を解答してください。$\boxed{4-\mathrm{I}}$ ，$\boxed{4-\mathrm{II}}$ については解答用紙の指示に従い，解答するほうを○で囲んでください。
8. 解答は100点満点で採点され，海事システム工学科と海洋電子機械工学科は採点結果の3倍が，流通情報工学科は採点結果の2倍が得点になります。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

E－M－2

1　（配点 25 点）

座標平面上に 3 点 A$(0,2)$，B$(4,0)$，C$(7,6)$ がある．点 P は座標平面上を

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$$

を満たしながら動くとする．

(1)　点 P の軌跡を図示せよ．また，軌跡と x 軸，y 軸との共有点を求めよ．

(2)　△ABP の面積が最大になるときの P の座標および △ABP の面積を求めよ．

2 （配点 25 点）

座標平面において，原点 O を中心とする円を C_1，放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax+b$ を C_2 とする．ただし，a，b は実数とする．C_1 と C_2 は点 P$(2,-1)$ を共有点にもち，かつ P において共通の接線 l をもつとする．また，C_2 の頂点を通り y 軸に平行な直線を m とし，l と m の交点を Q とする．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 直線 OQ，放物線 C_2，直線 m および y 軸で囲まれる図形の面積は，直線 OP により二等分されることを示せ．

$\boxed{3}$ （配点 25 点）

座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．自然数 n に対して，座標平面において連立不等式

$$y \leqq -\frac{1}{3}x^2 + 3n^2, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

によって表される領域を D_n とする．

(1) D_1 に含まれる格子点の総数を求めよ．

(2) D_n に含まれ，かつ直線 $x = 0$ 上にある格子点の総数を n を用いて表せ．

(3) D_n に含まれ，かつ直線 $x = 1$ 上にある格子点の総数を n を用いて表せ．

(4) 自然数 k に対して，D_n に含まれ，かつ直線 $x = 3k - 2$ 上にある格子点の総数を k，n を用いて表せ．

(5) D_n に含まれる格子点の総数を n を用いて表せ．

4 - I （配点 25 点）

実数 a に対して，座標平面上の放物線 C_1： $y = x^2 - 1$ と放物線 C_2： $y = \dfrac{1}{2}(x-a)^2$ の共有点を P，Q とし，P，Q を通る直線を l とする．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) a が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たしながら動くとき，l が通過しうる領域 D を図示せよ．

(3) a が (2) の範囲を動くとき，線分 PQ が通過しうる領域の面積を求めよ．

4 - II （配点 25 点）

関数 $f(x) = -\cos x + \dfrac{\cos x}{2\sqrt{2}\sin x}$ $(0 < x < \pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to \pi - 0} f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f(x)|\, dx$ の値を求めよ．