物理　出題の意図

$\boxed{\text{I}}$　運動する物体に働く力を正しく理解し，運動の記述に必要な各種方程式を適切に立式できるかを確認する。その上で，力学的に適切な解法を選択し，与えられた問いに的確に回答できる能力を問う。

$\boxed{\text{II}}$　日常的に体験する現象と力学が深く関わっていることを理解し，力とモーメントのつり合いを正しく立式して解答を導くことができる能力を問う。

$\boxed{\text{III}}$　万有引力による円運動の基本的理解を確認するとともに，運動量保存則およびケプラーの法則を適切に用いて，運動の変化を論理的に考察する力を評価することを目的としている。

$\boxed{\text{IV}}$　円柱形の媒質の軸付近に軸に垂直に入射した光が，スネルの法則に従って屈折して円柱の反対側へ通過する光路を計算し，光源の位置と像の位置の間に成り立つ関係式を導出させることを目的とするものである。

$\boxed{\text{V}}$　熱力学の基礎知識である，理想気体の状態方程式，気体の膨張による仕事，理想気体の内部エネルギー変化を問う。

$\boxed{\text{VI}}$　「電気容量」と「電気回路」に属する学習事項を組み合わせて，コンデンサーに関して出題した。ひとつには，コンデンサーの電気容量と静電エネルギーというコンデンサーの持つ性質についての理解，ふたつにはコンデンサーの充電と放電について，過渡状態と定常状態の違いについての理解をそれぞれはかることをねらいとしている。

$\boxed{\mathrm{I}}$

(1)　　答：$\sqrt{2gh}$

力学的エネルギー保存の法則より

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$　よって、$v = \sqrt{2gh}$

(2)　　v_1 ：$\frac{1}{4}\sqrt{2gh}$　　　d ：$\sqrt{\frac{3mgh}{2k}}$

小球と台、物体 A は質量$m + m + 2m = 4m$になって一体となって運動するため、運動量保存則より、

$4mv_1 = mv$　よって、$v_1 = \frac{1}{4}v = \frac{1}{4}\sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{gh}{8}}$

また、力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}4m{v_1}^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}4m\left(\frac{1}{4}v\right)^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Leftrightarrow kd^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)mv^2 = \frac{3m}{4}v^2$$

よって、$d = \sqrt{\frac{3m}{4k}}\ v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}\ v = \sqrt{\frac{3mg}{2k}}$

(3)　　v_2 ：$\sqrt{\frac{gh}{2}}$　　　v_3 ：$-\sqrt{\frac{gh}{2}}$

運動量保存の法則より、

$$(m + 2m)v_2 + mv_3 = mv$$

$$\Leftrightarrow v_3 = v - \frac{m + 2m}{m}v_2 = v - 3v_2$$

力学的エネルギー保存の法則より、

$$\frac{1}{2}(m + 2m){v_2}^2 + \frac{1}{2}m{v_3}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + 2m){v_2}^2 + \frac{1}{2}m(v - 3v_2)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Leftrightarrow 3{v_2}^2 + (v - 3v_2)^2 = v^2$$

$$\Leftrightarrow 12{v_2}^2 - 6v_2v = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(2v_2 - v)v_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

$$v_3 = v - 3v_2 = v - 3\frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}v = -\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

※$v_2 = \frac{1}{3}(v - v_3)$の場合

$$\frac{1}{2}(m + 2m){v_2}^2 + \frac{1}{2}m{v_3}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + 2m)\left\{\frac{1}{3}(v - v_3)\right\}^2 + \frac{1}{2}m{v_3}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Leftrightarrow (v - v_3)^2 + 3{v_3}^2 = 3v^2 \Leftrightarrow 2v^2 + 2vv_3 - 4{v_3}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(v + 2v_3)(v - v_3)=0$$

$$\Leftrightarrow v_3 = -\frac{1}{2}v = -\sqrt{\frac{gh}{2}}、\ v_2 = \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

(4)　　答：1/4 倍

はね返った小球の達する高さを h' とすると、力学的エネルギーの法則より

$$mgh' = \frac{1}{2}m{v_3}^2 = \frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{4}mgh$$

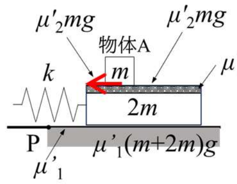
$$h' = \frac{1}{4}h$$

(5)　　F：$\mu_2 mg$　　向き：左向き

物体 A は台の上を右向きに運動しており、摩擦力は運動の反対方向に作用するので左向き

物体 A に働く垂直抗力の大きさは mg であるため、台と物体 A との間の摩擦力の大きさは

$F_\mu = \mu'_2 mg$　（図中赤）



(6)　　答：$a = \left(-\frac{3}{2}\mu'_1 + \frac{1}{2}\mu'_2\right)g$

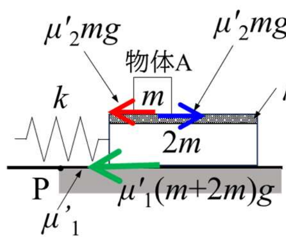
台は右向きに運動しているため台と水平面の間に働く摩擦力は左向きでその大きさは、

$\mu'_1(m + 2m)g$　（図中緑）

台が物体 A から受ける摩擦力は右向き（作用反作用、または物体 A に対して台は左向きに運動しているので摩擦力はその反対）でその大きさは、$\mu'_2 mg$　（図中青）

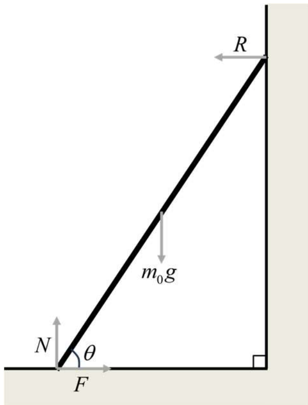
よって台の運動方程式は、$2ma = -\mu'_1(m + 2m)g + \mu'_2 mg$

$$a = \left(-\frac{3}{2}\mu'_1 + \frac{1}{2}\mu'_2\right)g$$



Ⅱ

(1)　F：$\dfrac{m_0 g}{2\tan\theta}$　　N：$m_0 g$　　R：$\dfrac{m_0 g}{2\tan\theta}$



はたらく力を図に示した。力とモーメントがつり合っている。

１．水平方向の力のつり合い（壁面からの抗力 R と摩擦力 F）

$$R = F$$

２．鉛直方向の力のつり合い（棒の重量と、棒の下端における垂直（鉛直）抗力 N）

$$N = m_0 g$$

３．床の棒の接触点を回転軸とするモーメントのつり合い

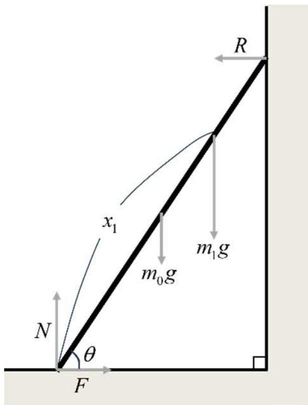
$LR\sin\theta = \dfrac{1}{2}Lm_0 g\cos\theta$　書き換えて　$R = \dfrac{m_0 g}{2\tan\theta}$　$(=F)$

(2)　答：$\tan\theta \geq \dfrac{1}{2\mu}$

４．すべらない条件（摩擦力が最大静止摩擦力よりも小さい）は　$F \leq \mu N$

(1)の表記を代入して　$\tan\theta \geq \dfrac{1}{2\mu}$

(3)　答：$x_1 > \left\{\mu\left(m_0 + m_1\right)\tan\theta - \dfrac{1}{2}m_0\right\}\dfrac{L}{m_1}$



考え方は(1)，(2)と変わらない。上図のように m_1 が加わる。X を棒がすべりだす最小の値とする。水平・鉛直方向の力のつり合い，モーメントのつり合い，最大静止摩擦力，の４つの条件はそれぞれ

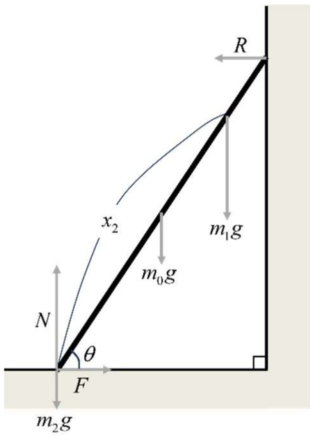
$$R = F$$
$$N = m_0 g + m_1 g$$
$$LR\sin\theta = \frac{1}{2}Lm_0 g\cos\theta + Xm_1 g\cos\theta$$
$$F = \mu N$$

まとめると　$X = \left\{\mu\left(m_0 + m_1\right)\tan\theta - \dfrac{1}{2}m_0\right\}\dfrac{L}{m_1}$,

求める条件は　$x_1 > X$

(4)　答：$x_2 > \left\{ \mu \left(m_0 + m_1 + m_2 \right) \tan\theta - \frac{1}{2} m_0 \right\} \frac{L}{m_1}$

ここでも考え方は変わらない。Xを棒がすべりだす最小の値とする。垂直抗力にはさらにm_2の分も考慮する。そのおもりは回転軸の位置に置いたため，モーメントのつり合い式についてはそのままとなる。



$$R = F$$
$$N = m_0 g + m_1 g + m_2 g$$
$$LR\sin\theta = \frac{1}{2} L m_0 g \cos\theta + X m_1 g \cos\theta$$
$$F = \mu N$$

まとめると　$X = \left\{ \mu \left(m_0 + m_1 + m_2 \right) \tan\theta - \frac{1}{2} m_0 \right\} \frac{L}{m_1}$,

求める条件は　$x_2 > X$

Ⅲ

(1) v_0 : $v_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$　　T_0 : $2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}$

半径 r_0 の円軌道上での速さを v_0 とすると、人工衛星 S に働く万有引力が向心力となるので

$$\frac{GMm}{r_0^2}=\frac{mv_0^2}{r_0} \quad\rightarrow\quad v_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

公転周期 T_0 は $T_0=\frac{2\pi r_0}{v_0}=2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}$

(2) v_1 : $\sqrt{\frac{GM}{r_0}}+\frac{m_1}{m}u$　　v_2 : $\frac{r_0}{r_1}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}+\frac{m_1}{m}u\right)$

運動量保存則より $mv_0=(m-m_1)v_1+m_1(v_1-u)=mv_1-m_1u$

$$v_1=v_0+\frac{m_1}{m}u=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}+\frac{m_1}{m}u$$

楕円軌道に移行した後を考える。面積速度一定なので $\frac{1}{2}v_1r_0=\frac{1}{2}v_2r_1$

$$v_2=\frac{r_0}{r_1}v_1=\frac{r_0}{r_1}\left(v_0+\frac{m_1}{m}u\right)=\frac{r_0}{r_1}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}+\frac{m_1}{m}u\right)$$

［力学的エネルギー保存則を用いた別解］

力学的エネルギー保存から $\frac{1}{2}v_1^2-\frac{GM}{r_0}=\frac{1}{2}v_2^2-\frac{GM}{r_1}$

$$v_1{}^2-v_2{}^2=2\left(\frac{GM}{r_0}-\frac{GM}{r_1}\right)=\frac{2(r_1-r_0)GM}{r_0r_1}$$

面積速度一定の式 $\frac{1}{2}v_1r_0=\frac{1}{2}v_2r_1$ から得られる $v_2=\frac{r_0}{r_1}v_1$を代入して

$v_1=\sqrt{\frac{2r_1GM}{r_0(r_0+r_1)}}$ を得る。また、$v_2=\frac{r_0}{r_1}v_1$ であるから $v_2=\sqrt{\frac{2r_0GM}{r_1(r_0+r_1)}}$ となる。

(3)　　答：$\frac{(m-m_1)}{u}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_1}}-\frac{r_0}{r_1}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}+\frac{m_1}{m}u\right)\right)$

点 Q において再び推進剤を噴射する。新たな円軌道上で必要な速さv_3は，$v_3=\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$ と表せる。ここで噴射は瞬間的なので運動量保存が成り立つとして，

$$(m-m_1)v_2=(m-m_1-m_2)v_3+m_2(v_3-u)$$

$$(m-m_1)v_2=(m-m_1)v_3-m_2u$$

$$m_2=\frac{(m-m_1)(v_3-v_2)}{u}=\frac{(m-m_1)}{u}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_1}}-\frac{r_0}{r_1}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}+\frac{m_1}{m}u\right)\right)$$

IV

(1) $\boxed{（ア）}$ ：$\theta + 2\alpha - 2\beta + \pi$

OR = OS だから ∠OSR = ∠ORS = β．点 R と点 S における屈折の法則より

$$\frac{\sin\angle\mathrm{MRP}}{\sin\angle\mathrm{ORS}} = \frac{\sin\angle\mathrm{NST}}{\sin\angle\mathrm{OSR}} = n.$$ よって $\sin\angle\mathrm{NST} = n\sin\angle\mathrm{OSR} = n\sin\angle\mathrm{ORS} = \sin\angle\mathrm{MRP}.$

ここで∠MRPと∠NSTはいずれも$\pi/2$以下なので$\angle\mathrm{NST} = \angle\mathrm{MRP} = \theta + \alpha$ を得る。

$\angle\mathrm{QSN} = \angle\mathrm{POS} = \alpha + \pi - 2\beta$ と合わせて$\boxed{（ア）} = \angle\mathrm{QSN} + \angle\mathrm{NST} = \theta + 2\alpha - 2\beta + \pi$ となる。

(2) $\boxed{（イ）}$：$\dfrac{L_1}{r} - 1$　$\boxed{（ウ）}$：$\dfrac{L_1}{nr}$

ΔOPR に正弦定理を用いて $\dfrac{r}{\sin\theta} = \dfrac{L_1}{\sin(\pi-\theta-\alpha)}$.

よって $\sin(\theta+\alpha) = \dfrac{L_1}{r}\sin\theta.$ …… ①

点 R における屈折の法則より $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\beta} = n.$

①を用いて $\sin\beta = \dfrac{1}{n}\sin(\theta+\alpha) = \dfrac{L_1}{nr}\sin\theta.$ …… ②

① と②および $|\theta|, |\alpha|, |\beta| \ll 1$ であることから

$\alpha \fallingdotseq \left(\dfrac{L_1}{r} - 1\right)\theta$ および $\beta \fallingdotseq \dfrac{L_1}{nr}\theta$ であり, $\boxed{（イ）}$, $\boxed{（ウ）}$ は順に $\dfrac{L_1}{r} - 1,\ \dfrac{L_1}{nr}$となる。

(3) $\boxed{（エ）}$ ： $\dfrac{n}{2n-2}r$

問(1)より半直線 ST が直線 PO と交わるための条件は$\theta + 2\alpha - 2\beta > 0$ である。これに問(2)の結果を代入して$\left[1 + 2\left(\dfrac{L_1}{r} - 1\right) - \dfrac{2L_1}{nr}\right]\theta > 0.$ これを整理して $L_1 > \dfrac{n}{2n-2}r$ が得られる。つまり $\boxed{（エ）}$ は $\dfrac{n}{2n-2}r$ である。

(4) $\boxed{（オ）}$: $\dfrac{r}{2-\left(\frac{2}{n}+\frac{r}{L_1}\right)}$ $\boxed{（カ）}$: $\dfrac{r}{2-\frac{2}{n}}$

$\Delta\mathrm{OSV}$ に正弦定理を用いて $\dfrac{\mathrm{OS}}{\sin\angle\mathrm{OVS}}=\dfrac{\mathrm{OV}}{\sin\angle\mathrm{OSV}}$. よって $\mathrm{OV}=\dfrac{\sin\angle\mathrm{OSV}}{\sin\angle\mathrm{OVS}}\mathrm{OS}$.

ここで $\angle\mathrm{OSV}=\pi-\angle\mathrm{NST}=\pi-(\theta+\alpha)$, $\angle\mathrm{OVS}=\angle\mathrm{QSN}+\angle\mathrm{NST}-\pi=\theta+2\alpha-2\beta$ より

$L_2=\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+2\alpha-2\beta)}r\fallingdotseq\dfrac{\theta+\alpha}{\theta+2\alpha-2\beta}r\fallingdotseq\dfrac{r}{2-\left(\frac{2}{n}+\frac{r}{L_1}\right)}=\boxed{（オ）}$. 以上の近似のもとで,

$\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_2}\fallingdotseq\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{2-\left(\frac{2}{n}+\frac{r}{L_1}\right)}{r}=\dfrac{2-\frac{2}{n}}{r}=\dfrac{1}{r/(2-\frac{2}{n})}$. 従って $\boxed{（カ）}$ は $\dfrac{r}{2-\frac{2}{n}}$ である.

V

(1) p_1 : p_0 T_1 : $\frac{p_0 L_0 S}{R}$

力のつり合いより，

$$p_1 = p_0$$

理想気体の状態方程式より，

$$p_1 L_0 S = RT_1$$

$$\therefore T_1 = \frac{p_1 L_0 S}{R} = \frac{p_0 L_0 S}{R}$$

(2) 答：$p_0 + \frac{kx}{S}$

力のつり合いより，

$$p_2 S = p_0 S + kx$$

$$\therefore p_2 = p_0 + \frac{kx}{S}$$

(3) 答：$\left(2p_0 + \frac{kx}{S}\right)\frac{xS}{2}$

ピストンの位置が x のときの圧力を p，体積を V とする。
圧力 p は,

$$p = p_0 + \frac{kx}{S}$$

一方体積 V は

$$V = (L_0 + x)S$$

したがって，

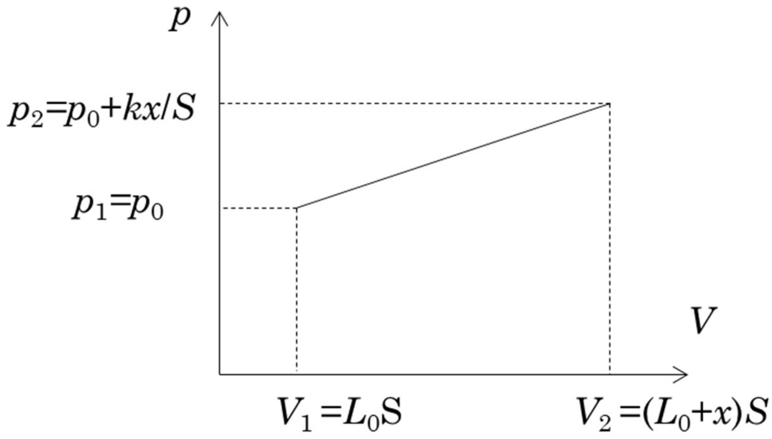
$$x = \frac{V}{S} - L_0$$

これを p の式に代入すると，

$$p = p_0 + \frac{k}{S}\left(\frac{V}{S} - L_0\right)$$

したがって，p は V の一次式である。
仕事 W は p-V 図の面積から，

$$\therefore W=\frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2}=\frac{\left(p_0+p_0+\frac{kx}{S}\right)\left((L_0+x)S-L_0S\right)}{2}=\frac{\left(2p_0+\frac{kx}{S}\right)xS}{2}$$



(4)　答：$\frac{3}{2}\left(RT_0-\left(p_0+\frac{kx}{S}\right)(L_0+x)S\right)$

内部エネルギー変化 ΔU は状態 3 と状態 4 の温度だけで決まる。状態 3 における温度は，状態 2 の温度 T_2 である。また，熱平衡に達するので状態 4 における気体の温度は T_0 である。

$$\therefore T_2=\frac{p_2V_2}{R}=\frac{1}{R}\left(p_0+\frac{kx}{S}\right)(L_0+x)S$$

$$\therefore \Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T=\frac{3}{2}R\left(T_0-\frac{1}{R}\left(p_0+\frac{kx}{S}\right)(L_0+x)S\right)=\frac{3}{2}\left(RT_0-\left(p_0+\frac{kx}{S}\right)(L_0+x)S\right)$$

$\boxed{\text{VI}}$

(1)(a) 　答：$\frac{1}{R}\left(V-\frac{Q}{C}\right)$

スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じた後に回路を電流 I が流れたとき，電圧に関する回路方程式は

$$V = IR + \frac{Q}{C}$$

$$I = \frac{1}{R}\left(V - \frac{Q}{C}\right)$$

(b) 　答：$\frac{V}{R}$

スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じるまでコンデンサー $\mathrm{C_1}$ に電荷は蓄えられていないため，XY 間の電位差は 0 である。スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じると $\mathrm{C_1}$ に電荷は蓄えられ，XY 間の電位差は増加する。従って，<u>スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じた直後に最大の電流I_{max}が流れる</u>。(a)の解に $Q=0$ を代入すると

$$I_{max} = \frac{1}{R}\left(V - \frac{0}{C}\right) = \frac{V}{R}$$

(2)(a) 　答：$\frac{5}{8}V$

スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じて十分に時間が経過した後，充電電流は $I=0$ に達するので，C_1 の両端電圧は V に達する。$\mathrm{C_1}$ に蓄えられた電荷 Q_1 は(a)で示した回路方程式から

$$V = 0 \cdot R + \frac{Q_1}{C}$$

$$Q_1 = CV$$

コンデンサー $\mathrm{C_2}$ に蓄えられた電荷 Q_2 は

$$Q_2 = 3C \cdot \frac{1}{2}V = \frac{3}{2}CV$$

C_1 と C_2 を並列接続すると，XY 間と LM 間の電位差が等しくなる。合成容量は $C_{12} = C + 3C = 4C$ となり、全体の電荷は$Q_{12} = CV + \frac{3}{2}CV = \frac{5}{2}CV$ となるので，並列接続されたコンデンサーの両端電圧 V_{12} は

$$V_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = \frac{\frac{5}{2}CV}{4C} = \frac{5}{8}V$$

(b) 　答：$\frac{3}{32}CV^2$

スイッチ $\mathrm{S_1}$ を開いた後，$\mathrm{C_1}$ と $\mathrm{C_2}$ を並列接続する前に，それぞれのコンデンサーに蓄えられていた静電エネルギー U_1 と U_2 は

$$U_1 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot 3C \cdot \left(\frac{1}{2}V\right)^2 = \frac{3}{8}CV^2$$

C_1 と C_2 を並列接続した後の静電エネルギー U_{12} は

$$U_{12}=\frac{1}{2}C_{12}{V_{12}}^2=\frac{1}{2}\cdot 4C\cdot\left(\frac{5}{8}V\right)^2=\frac{25}{32}CV^2$$

よって、C_1 と C_2 の並列接続によって失ったエネルギーの大きさ $\varDelta U$ は

$$\varDelta U=U_1+U_2-U_{12}=\frac{1}{2}CV^2+\frac{3}{8}CV^2-\frac{25}{32}CV^2=\frac{3}{32}CV^2$$

(3)　　答：$\frac{5}{8}CV^2$

C_1 と C_2 が全ての電荷を放出するので，2 本の抵抗によって消費される電力量は C_1 と C_2 に蓄えられた静電エネルギーと等しい。抵抗に電流の流れた時間を t〔s〕としたとき、抵抗の消費する電力量の大きさ $W=It\cdot V=I^2Rt$ は抵抗の大きさに比例するので、抵抗 R_2 が消費した電力量 W_2 は

$$W_2:U_{12}=4R:(R+4R)$$

$$W_2=\frac{4R}{R+4R}U_{12}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{32}CV^2=\frac{5}{8}CV^2$$