

数

学

(120分)

(令和5年度 前期日程)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. この冊子は全部で7ページから成っています。表紙を開くと白紙があります。さらに、その白紙を開いた左のページから1ページ目の問題がはじまります。印刷が不鮮明な場合、又はページの脱落に気付いたときは、申し出てください。
3. 解答用紙は4枚です。
4. 解答は必ず解答用紙の指定された欄に記入してください。(裏面は使用しないこと。)
5. 解答用紙には必ず受験番号、氏名を記入してください。記入を忘れたとき、あるいは誤った番号を記入したときは失格となる場合があります。
6. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
7. 数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数Bを選択する者は 1 2 3 4-I を、
数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数Bを選択する者は 1 2 3 4-II
を解答してください。 4-I 4-II については解答用紙の指示に従い、
解答するほうを○で囲んでください。
8. 解答は100点満点で採点され、海事システム工学科と海洋電子機械工学科は採点結果の3倍が、流通情報工学科は採点結果の2倍が得点になります。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

1 (配点 25 点)

座標平面上に 3 点 $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(7,6)$ がある. 点 P は座標平面上を

$$\overrightarrow{AP} \cdot (2\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}) = 0$$

を満たしながら動くとする.

- (1) 点 P の軌跡を図示せよ. また, 軌跡と x 軸, y 軸との共有点を求めよ.
- (2) $\triangle ABP$ の面積が最大になるときの P の座標および $\triangle ABP$ の面積を求めよ.

2

(配点 25 点)

座標平面において、原点 O を中心とする円を C_1 、放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$ を C_2 とする。ただし、 a, b は実数とする。 C_1 と C_2 は点 $P(2, -1)$ を共有点にもち、かつ P において共通の接線 l をもつとする。また、 C_2 の頂点を通り y 軸に平行な直線を m とし、 l と m の交点を Q とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 直線 OQ 、放物線 C_2 、直線 m および y 軸で囲まれる図形の面積は、直線 OP により二等分されることを示せ。

3

(配点 25 点)

座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。自然数 n に対して、座標平面において連立不等式

$$y \leq -\frac{1}{3}x^2 + 3n^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

によって表される領域を D_n とする。

- (1) D_1 に含まれる格子点の総数を求めよ。
- (2) D_n に含まれ、かつ直線 $x = 0$ 上にある格子点の総数を n を用いて表せ。
- (3) D_n に含まれ、かつ直線 $x = 1$ 上にある格子点の総数を n を用いて表せ。
- (4) 自然数 k に対して、 D_n に含まれ、かつ直線 $x = 3k - 2$ 上にある格子点の総数を k, n を用いて表せ。
- (5) D_n に含まれる格子点の総数を n を用いて表せ。

4-I (配点 25 点)

実数 a に対して、座標平面上の放物線 $C_1: y = x^2 - 1$ と放物線 $C_2: y = \frac{1}{2}(x - a)^2$ の共有点を P, Q とし、 P, Q を通る直線を l とする。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) a が $-1 \leq a \leq 1$ を満たしながら動くとき、 l が通過しうる領域 D を図示せよ。
- (3) a が (2) の範囲を動くとき、線分 PQ が通過しうる領域の面積を求めよ。

4-II (配点 25 点)

関数 $f(x) = -\cos x + \frac{\cos x}{2\sqrt{2}\sin x}$ ($0 < x < \pi$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f(x)| dx$ の値を求めよ。