$\boxed{1}$ （解答例）

(1) 与式

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - \frac{3}{a^2}x + 1$$

より，

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax - \frac{3}{a^2} = 0 \quad \cdots ①$$

2 次方程式 ① は，解の判別式がすべての $a \neq 0$ に対して

$$D/4 = a^2 + \frac{1}{a^2} > 0$$

を満たすので，常に相異なる 2 つの実数解を持つ。したがって，$f(x)$ は常に 2 つの極値，つまり極大値と極小値を持つ。

(2) ① の解を α，β（$\alpha < \beta$）とおくと，解と係数の関係より，

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{a^2} \quad \cdots ②$$

また ② より，

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$$

よって，$\alpha < \beta$ に注意すると，

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \quad \cdots ③$$

3 次関数のグラフから，$\alpha < \beta$ より $f(\alpha)$ が極大値，$f(\beta)$ が極小値である。したがって，

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \alpha^3 - \beta^3 + 3a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) - \frac{3}{a^2}(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)\left\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 3a(\alpha + \beta) - \frac{3}{a^2}\right\} \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

④ に ② と③ を代入すると，

$$\begin{aligned} ④ &= -2\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \cdot \left(-2a^2 - \frac{2}{a^2}\right) \\ &= 4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

ここで，$a \neq 0$ なので相加・相乗平均の関係より，

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geqq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$$

よって，

$$a^2 = \frac{1}{a^2} \quad \text{つまり} \quad a^4 = 1 \ \text{より} \ a = \pm 1$$

のときに $f(\alpha) - f(\beta)$ は最小になり，求める最小値は $8\sqrt{2}$ である。

（出題の意図）

数学Ⅱの「微分」の範囲から，3 次関数の増減や極値に関する基本的な知識と考察力，および
それらを用いた計算力を総合的に確認するために出題した。

$\boxed{2}$ （解答例）

(1) $k=1$ のとき，

$$f(x)=x^2-x=x\,(x-1)$$

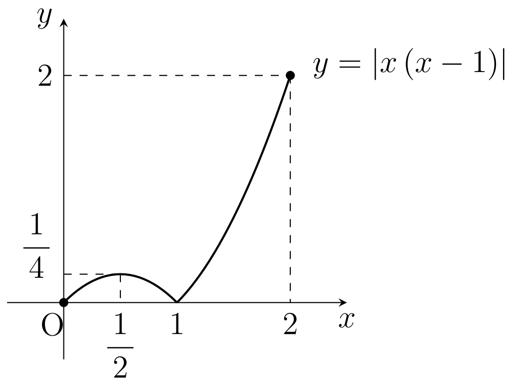
よって，

$$|f(x)|=\begin{cases} -x\,(x-1) & (0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \\ \ \ x\,(x-1) & (1 < x \leqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

また，

$$-x\,(x-1)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

と $f(2)=2$ に注意すると，$y=|f(x)|$ のグラフは次のようになる。

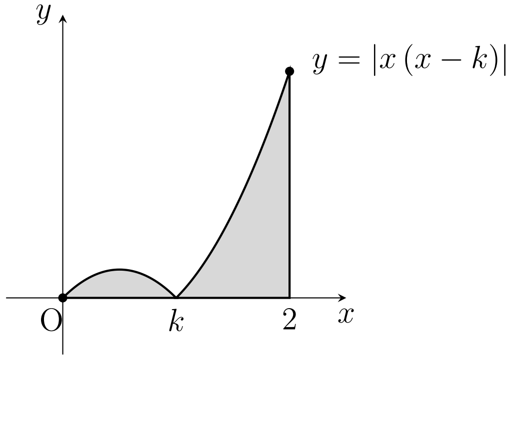


(2) $k=\displaystyle\int_0^2 |f(t)|\,dt$ のとき，

$$k=\int_0^2 |f(t)|\,dt=\int_0^2 \left|t^2-kt\right|\,dt \quad \cdots ①$$

$|t^2-kt|=|t\,(t-k)|$ なので，絶対値の中の符号が変わるのは $t=0$ と $t=k$ のときである。したがって，符号反転点 $t=k$ が 0 から 2 の範囲に入るかどうかで場合分けする。

(i) $0<k \leqq 2$ のとき



① より，

$$\begin{aligned} k &= \int_0^k \left(-t^2+kt\right)\,dt + \int_k^2 \left(t^2-kt\right)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3}+\frac{kt^2}{2}\right]_0^k + \left[\frac{t^3}{3}-\frac{kt^2}{2}\right]_k^2 \\ &= \frac{k^3}{6}+\frac{8}{3}-2k+\frac{k^3}{6} \end{aligned}$$

整理すると，

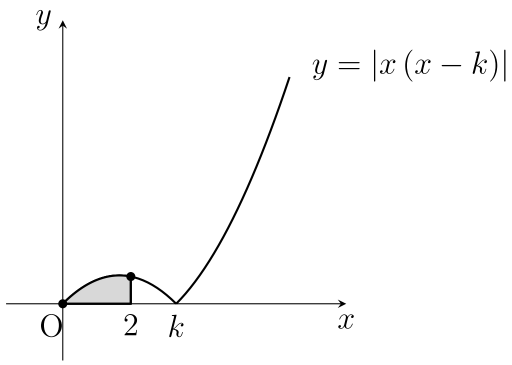
$$\begin{aligned} k^3-9k+8&=0 \\ (k-1)\left(k^2+k-8\right)&=0 \\ k=1,\quad \frac{-1\pm\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

ここで，$5<\sqrt{33}<6$ より，

$$2<\frac{-1+\sqrt{33}}{2}<3$$

よって，$0<k\leqq 2$ を満たすのは $k=1$

(ii) $2<k$ のとき



① より，

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 \left(-t^2+kt\right)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3}+\frac{kt^2}{2}\right]_0^2 \\ &= -\frac{8}{3}+2k \end{aligned}$$

よって，$k=\dfrac{8}{3}$

(i)，(ii) より，求める $f(x)$ は，

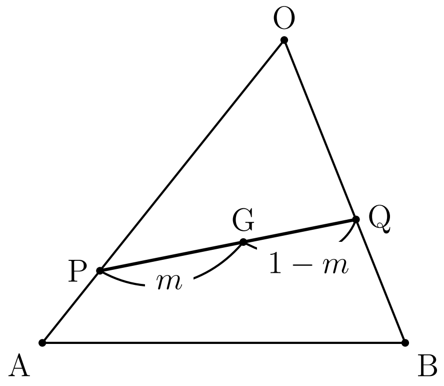
$$f(x)=x^2-x \quad と \quad f(x)=x^2-\frac{8}{3}x$$

（出題の意図）

数学Ⅱの「積分」の範囲から，絶対値を含む関数のグラフを正しく把握し，定積分を用いて面積を計算するための基本的な知識と考え方，および計算力を確認するために出題した。

$\boxed{3}$ （解答例）

(1)



G は △OAB の重心なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \quad \cdots ①$$

また，G は線分 PQ の内分点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= (1-m)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + m\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= (1-m)\,s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + mt\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

① と ② において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は一次独立（A，B は同一直線上にない）なので係数比較ができる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数を比較すると，

$$(1-m)\,s = \frac{1}{3}, \quad mt = \frac{1}{3}$$

よって，$\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 3 \quad \cdots ③$

(2)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\triangle\,\mathrm{OAB}\,\text{の面積}}{\triangle\mathrm{OPQ}\,\text{の面積}} = \frac{\dfrac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\,\sin\angle\mathrm{AOB}}{\dfrac{1}{2}\,\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\,\sin\angle\mathrm{AOB}} = \frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{s}\left(3 - \frac{1}{s}\right) = -\left(\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad \cdots ④$$

P，Q はそれぞれ OA，OB 上（ただし O ではない）にあるので，$0 < s \leqq 1$，$0 < t \leqq 1$，さらに ③ より，

$$\frac{1}{s} \geqq 1, \quad \frac{1}{t} = 3 - \frac{1}{s} \geqq 1 \qquad \text{よって，}\quad 1 \leqq \frac{1}{s} \leqq 2 \quad \cdots ⑤$$

したがって，$x = \dfrac{1}{s}$ とおいて ⑤ の範囲で上に凸の 2 次関数 ④ の最大最小を調べると，

$$2 \leqq \frac{S_1}{S_2} \leqq \frac{9}{4}$$

よって，求める最大値は $\dfrac{9}{4}$，最小値は 2 となる。

（出題の意図）

数学Ｃの「ベクトル」の範囲から，内分点や重心に関する基本的な知識を基に，位置ベクトルを用いて図形の数量関係を処理する力と計算力を確認するために出題した。

$\boxed{4}$ （解答例）

(1) ・p_2 は 1, 2 回目に表が出る確率なので $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

・p_3 は 1 回目に裏, 2, 3 回目に表が出る確率なので $p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

・p_4 は 2 回目に裏, 3, 4 回目に表が出る確率なので $p_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(2) ・q_{n+1} は n 回投げた時点で終了せず, $n+1$ 回目に裏が出る確率なので

$$q_{n+1} = (q_n + r_n) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n \quad \cdots ①$$

・r_{n+1} は n 回目に裏が出て終了せず, $n+1$ 回目に表が出る確率なので

$$r_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} q_n \quad \cdots ②$$

(3) p_{n+2} は $n+1$ 回目に表が出て終了せず，$n+2$ 回目に表が出る確率なので，

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} r_{n+1} \quad \cdots ③$$

①, ②, ③ より，

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} q_{n-1} + \frac{1}{2} r_{n-1} \right) = \frac{1}{4} \left(r_n + \frac{1}{2} r_{n-1} \right) = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{4} p_n$$

ただし，$p_1 = 0$，$p_2 = \frac{1}{4}$ である。2 次方程式

$$x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{の解は} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \quad \text{より，}$$

一般項を

$$p_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n B$$

とおくと，

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot A + \frac{1-\sqrt{5}}{4} \cdot B = 0 \quad \cdots ④$$

$$p_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^2 B = \frac{1}{4} \quad \cdots ⑤$$

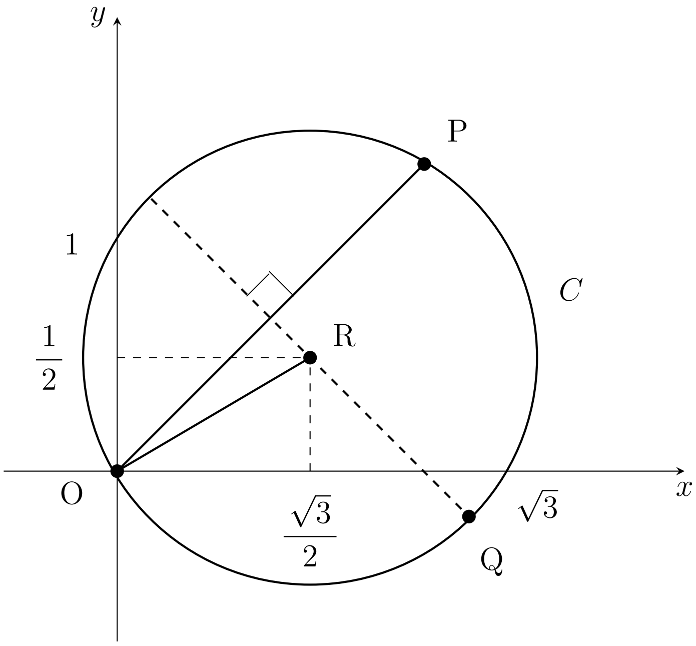
したがって，④ に $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ をかけて ⑤ を引くと，$\frac{1-\sqrt{5}}{4} \cdot B = -\frac{\sqrt{5}}{10}$ が得られる。
さらに，これを ④ に代入すると，$\frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot A = \frac{\sqrt{5}}{10}$ が得られる。以上より，

$$p_n = \frac{\sqrt{5}}{10} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} \right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

（出題の意図）

数学Ａの「確率」と数学Ｂの「数列」の範囲から，事象を状態ごとに整理して確率を求め，その推移を漸化式で表現・処理するための基本的な知識と考え方，および計算力を確認するために出題した。

$\boxed{5}$ （解答例）



$x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y = 0$ より，

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \cdots ①$$

よって，円 C の中心を R とすると，R の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。ここで，点 Q を円周 C 上で動かすと，Q と OP との距離が最大になるときに △OPQ の面積は最大になる。つまり，図のように OP と QR が直交し，Q の x 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ よりも大きい場合に △OPQ の面積が最大となる。したがって，Q の座標を QR の傾きが -1（OP の傾き $+1$ と直交）であることを踏まえて $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + t, \frac{1}{2} - t\right)$ とおき，Q が C 上にあるような $t > 0$ を求めればよい。① より，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

整理すると，

$$2t^2 = 1 \quad より, \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって，求める Q の座標は $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$ である。また，そのときの △OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

（出題の意図）

数学Ⅱの「図形と方程式」の範囲から，円の方程式を基に図形の位置関係を座標で把握し，面積を最大化するための基本的な知識と考え方，および計算力を確認するために出題した。

（試験全体を通しての出題の意図）

本試験は，数学の出題範囲である数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学B（数列），数学C（ベクトル）における基本事項の理解を前提に，多様な内容を横断的に扱い，計算技能のみならず，条件整理，場合分け，図形や数量関係の把握を通して，論理的思考力および問題解決力を総合的に評価することを目的として出題した。